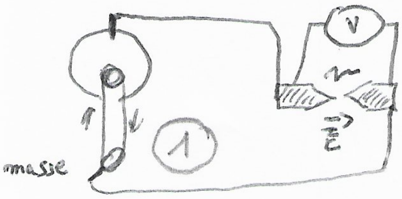
CC2 - Electrostatique - Juin 2022

Question de TP

2 pointes métalliques séparées d'une distance d, de l'ordre du mm, sont connectées aux bornes d'un générateur de Van de Graaf. Un voltmètre mesure la diff. de potentiel



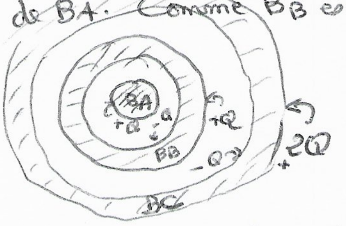
entre les pointes. Lors de la charge la ddp augmente et atteint une valeur critique V_c qui génère un arc électrique lumineux et sonore entre les pointes. L'air à Tambiante et Patmosphérique est ionisé sous l'effet du champ électrique concentré entre les pointes.

On déduit le champ disruptif de l'air par $E_{dis} \simeq \dfrac{V_c}{d}$; Lors des TP nous avons mesuré $V_c \simeq 2.2\,kV$ pour $d \simeq 0.7\,mm$ soit $\|\vec{E}_{dis}\| \simeq 3.14\ MV/m \simeq 30000\ V/cm = 30kV/cm$

0,5 0,5

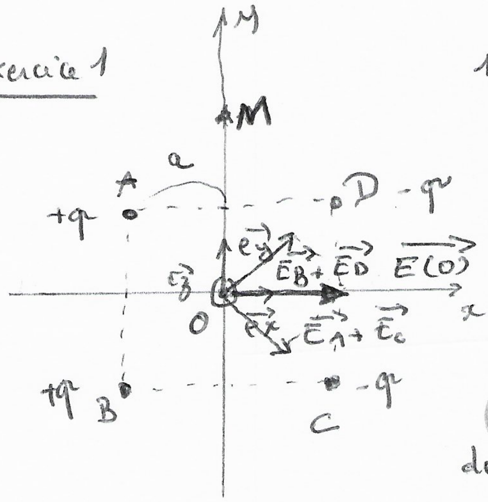
Question sur les conducteurs

B_A, B_B et B_C sont isolés donc leur charge totale ne varie pas.
Ce sont des conducteurs donc les charges apparaissent en surface sous la forme de densité de charges superficielles. $+Q$ se trouve ainsi répartie sur la surface externe de B_A. 0,5 Une charge $-Q$ apparait sur la surface interne de B_B en regard de B_A. B_A et B_B sont en influence totale. Comme B_B est neutre, une charge $+Q$ 0,5 apparait sur la surface externe de B_B. B_B et B_C sont



en influence totale donc la charge $-Q$ 0,5 apparait sur la surface interne de B_C en regard de B_B. Comme B_C porte une charge totale égale à $+Q$; une charge $+2Q$ 0,5 apparait sur la surface externe de B_C. On pourra appliquer le théorème de Gauss avec des surfaces fermées passant à l'intérieur de B_B ou à l'intérieur de B_C pour se rendre compte que dans les 2 cas $\dfrac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$.

Exercice 1



1°) $(x,0,y)$ plan de symétrie donc : $\vec{E}(M) = E_x\vec{e_x} + E_y\vec{e_y} + 0\vec{e_z}$

1

$(y,0,z)$ plan d'antisymétrie donc $\vec{E}(M) \perp (y,0,z)$

donc $\vec{E}(M) = E_x\,\vec{e_x}$ $M(0,y,0)$

donc $\vec{E}(M) = E_x(y)\,\vec{e_x}$

2°) le plan $(x,0,z)$ est aussi un plan de symétrie

le point $O \in (x,0,z)$ et $O \in (y,0,z)$

1 $\vec{E}(O)$ doit donc être $\perp$ à $(y,0,z)$ $\vec{E}(O) \in (x,0,z)$

donc colinéaire à $\vec{e_x}$ et

donc $\vec{E}(O) = E_x\,\vec{e_x}$ ici $E_x(0,0,0)$.

3°) $\vec{E}(O) = \vec{E_A} + \vec{E_B} + \vec{E_C} + \vec{E_D}$; on voit facilement que $E_B = E_D = E_A = E_C = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 2a^2}$

1

en projetant sur $\vec{e_x}$ il vient

$$\|\vec{E}(O)\| = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0(2a^2)}\cdot\cos 45^\circ = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

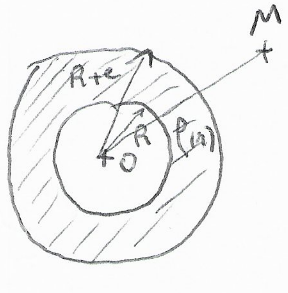
donc $\vec{E}(O) = \dfrac{\sqrt{2}\,q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\,\vec{e_x}$ ou $\vec{E}(O) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\vec{AO}}{\|\vec{AO}\|^3} + \dfrac{\vec{BO}}{\|\vec{BO}\|^3} - \dfrac{\vec{CO}}{\|\vec{CO}\|^3} - \dfrac{\vec{DO}}{\|\vec{DO}\|^3}\right) = \dfrac{q\,(\vec{AC}+\vec{BD})}{4\pi\varepsilon_0 (a\sqrt{2})^3}$

$= \dfrac{q\,4a}{4\pi\varepsilon_0\, a^3 2\sqrt{2}}\,\vec{e_x}$

$\vec{AC}(2a,-2a,0)$; $\vec{BD}(2a,2a,0)$ donc $\vec{AC}+\vec{BD}(4a,0,0)$

Exercice 2

1°) $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$



donc $Q = \int_R^{R+e}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \rho(r).r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$

$= \int_R^{R+e} \rho(r) r^2 dr \,.\, \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta}_{2} \,.\, \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$

donc $Q = 4\pi \int_R^{R+e} \rho_0 \frac{R^2}{r^2} r^2 dr = 4\pi\rho_0 R^2 \int_R^{R+e} dr$ donc $\underline{Q = 4\pi \rho_0 R^2 e}$ 1

2°) ρ ne dépend que de r donc tous les plans contenant la direction $\overrightarrow{OM}$ sont plans de symétrie du système. Le champ électrique au point M doit appartenir à tous ces plans, il est donc orienté le long de la direction commune à tous ces plans càd dans la direction $\overrightarrow{OM}$ càd $\overrightarrow{e_r}$. donc $\underline{\vec{E}(M) = E_r \overrightarrow{e_r}}$. 0,5 Les invariances par rotation autour de O et autour de z indiquent que en coordonnées sphériques E_r ne dépend ni de θ, ni de φ donc au final $\underline{\vec{E}(M) = E_r(r)\, \overrightarrow{e_r}}$ 0,5

3°) Tous les plans de l'espace contenant O sont des plans de symétrie donc $\vec{E}(O)$ est colinéaire à toutes les directions de l'espace donc $\vec{E}(O) = \vec{0}$ 0,5

4°) S_{gauss} = Sphère de centre O de rayon r / $r < R$.

$\Phi_{S_{gauss}} = \iint_{S_{gauss}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{gauss}} E_r(r)\,\overrightarrow{e_r}.r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \overrightarrow{e_r} = r^2 E_r(r) \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$= 4\pi r^2 E_r(r)$ 1

Ce calcul sera valable pour les questions 4°), 5°) et 6°)

$\underline{\text{si } r < R}$ alors $\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ car $\rho(r) = 0$ si $r < R$ on en conclue que

si $r < R$ $E_r(r) = 0$ donc $\underline{\overrightarrow{E_{int}} = \vec{0}}$ 0,5

5°) S_{gauss} = sphère de centre O de rayon r / $R < r < R+e$

$\Phi_{S_{gauss}} = 4\pi r^2 E_r(r)$ (Voir 4°) ici il faut calculer $\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\sum q_{int} = \int_R^{r}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \rho(r).r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = 4\pi \int_R^{r} \rho_0 R^2 dr = 4\pi \rho_0 R^2 (r-R)$

donc $\cancel{4\pi} r^2 E_r(r) = \cancel{4\pi} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} R^2 (r-R)$ donc $E_r(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0} \frac{(r-R)}{r^2}$

donc $\underline{\overrightarrow{E_B} = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0} \frac{(r-R)}{r^2} \overrightarrow{e_r}}$ 1

6°) ici $\frac{\Sigma q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi \rho_0 R^2 e}{\varepsilon_0}$ donc $E_r(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0} \frac{e}{r^2}$

donc $\vec{E}_{ext} = \frac{\rho_0 R^2 e}{\varepsilon_0 r^2} \vec{e_r}$ 0,5

7°) $E_B(r=R) = 0 = E_{int}(r=R)$ donc continuité du champ en $r=R$

$E_B(r=R+e) = \frac{\rho_0 R^2 e}{\varepsilon_0 (R+e)^2}$ 0,5

et $E_{ext}(r=R+e) = \frac{\rho_0 R^2 e}{\varepsilon_0 (R+e)^2}$

donc $E_B(r=R+e) = E_{ext}(r=R+e)$

donc continuité du champ en $r=R+e$

Le champ électrique ne présente donc aucune discontinuité aux frontières des 3 régions de l'espace.

Exercice 3

1°) $r<R$. $\rho(r)=0$ donc $\text{div}\,\vec{E}_{int}=0$ 0,5

donc $\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r}=0$ donc $r^2E_r = C_{int}$ donc $E_r = \frac{C_{int}}{r^2}$

2°) en O ; $r=0$; $\vec{E}_{int}=\vec{0}$ donc $E_r(r=0)=0$ donc $r^2E_r=0$ au point O donc $C_{int}=0$

donc au final si $r<R$, $E_r(r)=0$ donc $\vec{E}_{int}=\vec{0}$ 0,5

on obtient le m̂ résultat que dans l'exo 2.

3°) $R<r<R+e$ $\rho(r) = \rho_0 \frac{R^2}{r^2}$ donc $\text{div}\,\vec{E}_B = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$

donc $\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}$ donc $\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r} = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow r^2E_r(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}r + C_B$ 1

donc $E_r(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0 r} + \frac{C_B}{r^2}$ si $R<r<R+e$

4°) Le champ est continu à la traversée d'une surface chargée en volume donc

$E_{int}(r=R) = E_B(r=R)$ or $E_{int}=0$

donc $E_r(r=R)=0 \to \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0 R} + \frac{C_B}{R^2} = 0 \to \frac{C_B}{R^2} = \frac{-\rho_0 R}{\varepsilon_0}$

$\to C_B = -\frac{\rho_0 R^3}{\varepsilon_0}$

donc au final

$E_r(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0 r} - \frac{\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r^2}\right) = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}\frac{(r-R)}{r^2}$ 1

si $R<r<R+e$

donc $\vec{E}_B = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}\frac{(r-R)}{r^2}\vec{e_r}$; même résultat qu'à l'exo 2.

5°) ici $r > R+e$ donc $\rho(r) = 0$

donc $\operatorname{div} \vec{E}_{ext} = 0$ → $E_r(r) = \dfrac{C_{ext}}{r^2}$ (voir 1°) exo 3) 0,5

6°) le champ est continu donc $E_{ext}(r = R+e) = E_B(r = R+e)$

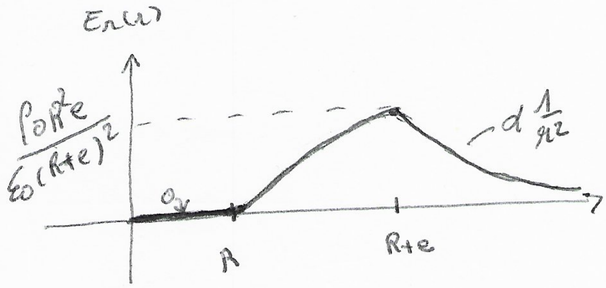
donc $\dfrac{C_{ext}}{(R+e)^2} = \dfrac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0} \dfrac{e}{(R+e)^2}$ donc $C_{ext} = \dfrac{\rho_0 R^2 e}{\varepsilon_0}$ 1

donc $E_r(r) = \dfrac{\rho_0 R^2 e}{\varepsilon_0 r^2}$ (pour $r > R+e$) donc $\vec{E}_{ext} = \dfrac{\rho_0 R^2 e}{\varepsilon_0 r^2} \vec{e_r}$; même résultat que pour l'exo 2

7°) $E_r(r) = 0$ si $r < R$

$E_r(r) = \dfrac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0} \dfrac{(r-R)}{r^2}$ si $R < r < R+e$

$E_r(r) = \dfrac{\rho_0 R^2 e}{\varepsilon_0 r^2}$ si $r > R+e$ 1

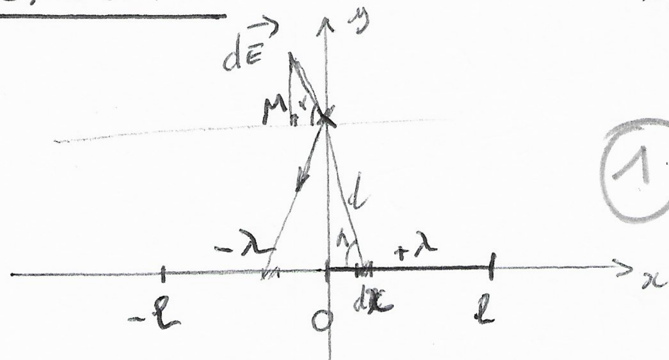


cette fonction est croissante si $r > R$ et $r < 2R$ 0,5

en effet je calcule sa dérivée → $\dfrac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0} \dfrac{r^2 - 2r(r-R)}{r^4}$ le signe de la dérivée est celui de ($r>0$) $r - 2r + 2R$ c.à.d celui de $2R - r$

$2R - r$ est > 0 donc la fonction est croissante entre R et $R+e$ comme $e < R$

Exercice 4



1

1°) Le plan (xOy) est un plan de symétrie donc

$\vec{E}(M) = E_x \vec{e_x} + E_y \vec{e_y} + 0 \vec{e_z}$

Le plan (y, O, z) est un plan d'anti-symétrie

donc $\vec{E}(M) \perp (y, O, z)$ donc $\vec{E}(M) \perp \vec{e_y}$

donc au final $\vec{E}(M) = E_x \vec{e_x}$

(Les charges − étant du côté des $x < 0$ le champ sera orienté vers $-\vec{e_x}$)

donc $\vec{E} = |E_x|$

2°) Un petit segment de longueur dx côté positif génère un champ élémentaire $\vec{dE}$ au point M ; ce champ projeté sur l'axe x a pour module :

$\dfrac{\lambda \, dx}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \cos\alpha$ avec $d^2 = x^2 + y^2$ et $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 1

le côté positif du fil génère donc au point M un champ suivant $-\vec{e_x}$ dont le module vaut :

$$\int_0^{\ell} \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \, dx$$

les segments du fil côté négatif génèrent des composantes élémentaires projetées suivant $-\vec{e_x}$ qui sont identiques donc au final :

$$\vec{E}(M) = -2\int_0^l \frac{\lambda x \quad dx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \quad \vec{e_x}$$

La bonne réponse est donc la 2.

3°) $$2\int_0^l \frac{\lambda x \quad dx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{2.\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\left[(x^2+y^2)^{-1/2}\right]_0^l\right)$$

$$= \frac{2.\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[(y^2)^{-1/2} - (l^2+y^2)^{-1/2}\right]$$

1

$$E = \frac{2.\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+l^2}}\right]$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+l^2}}\right)$$

NB si $l \to \infty$ $\vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\vec{e_x}$